

(11) إذا كانت  $\mu(E) = 0$  فإنه  $\int_E f(x) d\mu = 0$

انتهى المحاضرة الأولى

المحاضرة الثانية

الأربعاء 15 / 16 / 2018

تكملة لدرس الدالة لـ  $\mu$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}(x)$$

هو:

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

تكملة لدرس الدالة لـ  $\mu$  في صورة المجموعات

مبرهنة:

الدالة  $f(x)$  لـ  $\mu$  تكون متصلة إذا كانت  $f(x)$  متصلة في كل نقطة  $x$  حيث  $\mu(\{x\}) = 0$

مثال:

دالة ديرمليه متصلة في كل نقطة

بـ  $\mu$  لـ  $\mu$  (لا يوجد غير متصلة بـ  $\mu$  في كل نقطة)

ذكرنا الخواص:

مبرهنة:

إذا كانت  $f$  دالة  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تكون متصلة بـ  $\mu$  في كل نقطة

فإنه يكون  $f$  متصلة بـ  $\mu$  في كل نقطة  $x$  حيث  $\mu(\{x\}) = 0$

$$(L) \int_{[a, b]} f(x) d\mu = (R) \int_a^b f(x) dx$$

مبرهنة:

إنه إذا كانت  $f$  دالة ديرمليه متصلة بـ  $\mu$  في كل نقطة

فإنه  $f$  دالة ديرمليه متصلة بـ  $\mu$  في كل نقطة

وغير متصلة بـ  $\mu$  في كل نقطة



تقریباً، ام بـالكامل

$$\int_{[0,1]} \varphi(x) d\lambda, \int_{[0,1]} \psi(x) d\lambda, \int_{[0,1]} [\varphi(x) + \psi(x)] d\lambda$$

اذا كانت  $\varphi, \psi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  دوال مقياسية

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; x=0 \\ x & ; 0 < x < 1 \\ 1 & ; x=1 \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 & ; \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

المثل

نلاحظ ان  $\varphi, \psi$  دوال بسيطة، القيد الفعلي هو:

$$\varphi(x) = 0 \cdot \mathbb{I}_{\{0\}}(x) + 2 \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x) + 1 \cdot \mathbb{I}_{\{1\}}(x); x \in [0,1]$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{2}]}(x) + 2 \mathbb{I}_{] \frac{1}{2}, 1[}(x); x \in [0,1]$$

لذلك نجد:

$$\int_{[0,1]} \varphi(x) d\lambda = 0 \cdot \lambda(\{0\}) + 2 \lambda([0,1]) + 1 \lambda(\{1\}) = 0 + 2(1) + 1(0) = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \psi(x) d\lambda &= \frac{1}{2} \lambda([0, \frac{1}{2}]) + 2 \lambda(] \frac{1}{2}, 1[) \\ &= \frac{1}{2} (\frac{1}{2}) + 2 (\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} (\varphi(x) + \psi(x)) d\lambda &= \int_{[0,1]} \varphi(x) d\lambda + \int_{[0,1]} \psi(x) d\lambda \\ &= 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

كل ما به

$$\int_{[0,1]} [3\varphi(x) + 5\psi(x)] d\lambda = 3 \int_{[0,1]} \varphi(x) d\lambda + 5 \int_{[0,1]} \psi(x) d\lambda$$



$$= 3(2) + 5\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{49}{4}$$

ع.م. 2 تقريرا  
 لنكون لدينا  $f, g, [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  دالتين معينين  
 بالشكل  

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [2, 5] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \notin [2, 5] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

نثبت ان  $f$  دالة ليبيغ  $f$  و  $g$  تحولين  $\mathbb{R}$  الى  $\mathbb{R}$  التكاملي لكونها

اكد

تكون دالة ليبيغ اذا كانت قيمها محدودة

هل  $f$  متوسعة ومحدودة؟

لذلك لدينا  $\forall x \in [2, 5], 1 \leq f(x) \leq 1$

$\Rightarrow$   $f$  دالة محدودة

هل هي متوسعة؟

نلاحظ  $f(x) = 0$  ا.ع  $f(x) = 1$  ع.ق

$$\begin{aligned} E_0 &= E(f \neq 0) = \{x \in [2, 5], f(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in [2, 5], f(x) = 1\} \\ &= [2, 5] \cap \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$\lambda(E_0) = \lambda([2, 5] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

ع.ق

وبما ان  $f$  دالة ليبيغ  $f$  كحالة  $f(x) = 0$  كحالة  $f(x) = 1$

(ان  $f$  متوسعة ومحدودة)  $f = 0$  ا.ع  $f = 1$  ع.ق

فان  $f$  كحالة ليبيغ

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \int_{[0,1]} f_1(x) dx$$



1 / الدالة f

(ط) أثبت أن الدالة f محدودة ونسبة الخ متوسطة

$$E(f > c) = \{ x \in [-2, 5] : f(x) > c \}$$

$$= \begin{cases} [-2, 5] & \text{if } c \leq 0 \\ [-2, 5] \cap \mathbb{Q} & \text{if } 0 < c < 1 \\ \emptyset & \text{if } c \geq 1 \end{cases}$$

ومن ذلك يتبع أن الدالة f متوسطة

بأن f متوسطة ومحدودة وله كسولة وتكامل

$$\int_{[-2, 5]} f(x) d\lambda = \int_{[-2, 5] \cap \mathbb{Q}} f(x) d\lambda + \int_{[-2, 5] \setminus \mathbb{Q}} f(x) d\lambda$$

$$= 0 + 0 = 0$$

تكون الدالة f كسولة إذا كانت متوسطة ومحدودة

بمعنى

$$|g(x)| = |x^2 + 1| < 26, \quad \forall x \in [-2, 5]$$

بأن g محدودة

والدالة g متوسطة وله كسولة

لذلك تكون g دالة تكامل

$$\int_{[-2, 5]} g(x) d\lambda = \int_{-2}^5 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^5 = ?$$

(ط) الدالة g

على أن الدالة  $g(x) = x^2 + 1$  متوسطة وله كسولة

بأن g محدودة وبأن g متوسطة وله كسولة بـ ليبيغ

وبأن g دالة تكامل

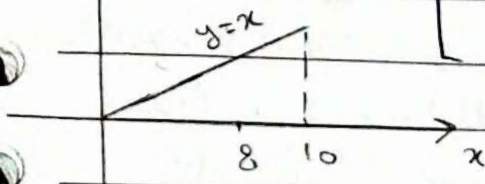
$$(L) \int_{[-2, 5]} g(x) d\lambda = (R) \int_{-2}^5 g(x) dx = \dots$$



تمرين 3

ليكن الدالة  $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 8 \\ -x & ; 8 \leq x < 10 \\ 1 & ; x = 10 \end{cases}$$



هل  $f$  متكاملة؟  
الحل:

الدالة  $f$  متكاملة على المجال  $[0, 10]$  لأن لكل عدد  
منه من نقاطها نقطة نهاية

لذلك تكون متكاملة على المجال  $[0, 10]$

$$\begin{aligned} (L) \quad \int_{[0,10]} f(x) dx &= (R) \quad \int_0^{10} f(x) dx \\ &= \int_0^8 x dx + \int_8^{10} (-x) dx = ? \end{aligned}$$

تمرين 4

ليكن المجموعة  $E = [-2, 3] \cup [7, 15]$  والدالة

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \in [-2, 3] \\ 2 & ; x \in [7, 15] \end{cases}$$

هل  $f$  متكاملة على  $E$ ؟

الحل:

الدالة  $f(x) = x+1$  متكاملة على المجموعة  $E_1 = [-2, 3]$   
لا  $f$  متكاملة على  $E_2 = [7, 15]$

والدالة  $f(x) = 2$  متكاملة على  $E_2$

الدالة  $f(x) = 2$  متكاملة على المجموعة  $E_2 = [7, 15]$

وبذلك تكون الدالة  $f(x)$  متكاملة على  $E_1 \cup E_2$  وليست



$$\int_E = \int_{E_1} + \int_{E_2}$$

$$\int_{[-2,3] \cup [7,15]} f(x) dx = \int_{[-2,3]} (x+1) dx + \int_{[7,15]} 2 dx$$

$$= (R) \int_{-2}^3 (x+1) dx + \int_7^{15} 2 dx$$

♡ - 17<sup>2</sup> 2013 13 13 13